Über das Anfangswertproblem der Dirac-Gleichung *

Von Josef Kamphusmann

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Münster
und der theoretischen Abteilung des Instituts für angewandte Physik der Universität Hamburg

(Z. Naturforschg. 17 a, 1041—1049 [1962]; eingegangen am 21. September 1962)

Es wird das Hadamardsche Verfahren zur Lösung partieller hyperbolischer Differentialgleichungen auf das Anfangswertproblem der Dirac-Gleichung bei raumartiger Anfangsfläche übertragen. Dabei ergibt sich eine Darstellungsformel, die die Lösung explizit und singularitätenfrei als Funktional der Anfangswerte und der Inhomogenität im Abhängigkeitsgebiet darstellt. Die so erhaltene Darstellungsformel wird verifiziert.

Ferner wird die Randbedingung $d\sigma_\mu \gamma^\mu \psi = 0$ für einen Lichtkegel als Anfangsfläche (charakteristisches Problem) untersucht. Dabei ist es möglich, diejenige Klasse von Funktionen anzugeben, die diese Bedingung erfüllt, wobei sich zeigt, daß dann die Lösung im Inneren von den Werten auf dem Rande nicht mehr abhängt. Schließlich wird für das charakteristische Anfangswertproblem mit dieser Randbedingung eine Darstellungsformel mit Hilfe des Hadamardschen Verfahrens hergeleitet und diskutiert. Es ergibt sich, daß diese Lösung auf dem Rande den Wert Null annimmt.

Das Problem besteht darin, die Lösung $\psi(x)$ der inhomogenen Dirac-Gleichung

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + \varkappa)\,\psi(x) = f(x) \tag{1}$$

in einem beliebigen Aufpunkt x als stetiges und singularitätenfreies Funktional der Anfangswerte von ψ auf einer raumartigen Fläche (speziell $x^0 = 0$) und der Inhomogenität f anzugeben.

Die Bezeichnungen sind wie folgt festgelegt:

a) Weltkoordinaten: x steht als Abkürzung für (x^0, x^1, x^2, x^3). x^0 ist $c\,t$ (reell!) und x^1, x^2, x^3 sind kartesische Koordinaten im Ortsraum. Der metrische Fundamentaltensor $(g_{\mu\nu})$ ist so gewählt, daß folgende Beziehungen gelten (die Summationsindizes $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ laufen von 0 bis 3, die Indizes i, j, k, l von 1 bis 3):

$$R^2 = g_{\mu\nu}\, x^\mu x^\nu = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \quad \text{(Weltabstand)},$$

$$r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = -g_{ij}\, x^i x^j \quad \text{(räumlicher Abstand)};$$

∂_μ steht als Abkürzung für $\partial/\partial x^\mu$.

b) Dirac-Gleichung: Die Schreibweise der Dirac-Gleichung ist durch (1) bereits festgelegt. Die γ_ν's sind durch die Vertauschungsrelation

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\, g_{\mu\nu} \tag{2}$$

definiert. Die Dirac-Gleichung wird hier als *eine* partielle Differentialgleichung erster Ordnung für die hyperkomplexe Funktion $\psi(x)$ im Bereich C_4 der Cliffordschen Algebra aufgefaßt (ψ ist also 16-komponentig), vgl. dazu etwa [1]. Die γ_ν sind dabei im Sinne einer hyperkomplexen Vektoralgebra (s. etwa [2], Kap. 6, § 5) die vier Einheitsvektoren des R_4 der speziellen Relativitätstheorie; der Ortsvektor ist dann $\gamma_\nu x^\nu$, und der Diracsche Differentialoperator $\gamma^\mu \partial_\mu$ stellt sich als die Verallgemeinerung des ∇-Operators dar.

In der vorliegenden Arbeit wird das Hadamardsche Verfahren in der Form verwendet wie es in [3], VI. Kap., § 9, Ziff. 3, für die Klein–Gordon-Gleichung beschrieben ist.

1. Herleitung der Darstellungsformel

Die Werte der Lösung im Punkte x hängen ab nur von den Werten der Inhomogenität und den Anfangswerten im sogen. Abhängigkeitsgebiet G (vgl. die Charakteristikentheorie hyperbolischer partieller Differentialgleichungen), das begrenzt wird von dem rückwärtigen Lichtkegel M von x und der Anfangsfläche B $(x^0 = 0)$, s. Abb. 1. Es ist bequem, für den Integrationspunkt x' neue Koordinaten τ, μ, α^j einzuführen durch

$$\begin{aligned} x'^0 &= x^0 - \tau\,, \\ x'^j &= x^j + \tau(1-\mu)\,\alpha^j \end{aligned} \tag{3}$$

* Auszug aus der Dissertation Universität Münster 1962.

[1] W. Franz, Zur Methodik der Dirac-Gleichung, S.B. Bayer. Akad. Wiss. 1935.

[2] M. Lagally u. W. Franz, Vorlesungen über Vektorrechnung, Akad. Verl.-Ges., Leipzig 1959.

[3] R. Courant u. D. Hilbert, Die Methoden der mathematischen Physik, 2. Band, Springer-Verlag, Berlin 1937.

mit $\alpha_j \alpha^j = -1$ (Richtungskosinusse des räumlichen Einheitsvektors). Größen, die mit der Tilde ($\sim$) gekennzeichnet sind, beziehen sich immer auf die Differenz $\tilde{x} = x - x'$. In den neuen Koordinaten hat man die Beziehungen

$$\begin{aligned} \tilde{R}^2 &= \tau^2 \mu (2 - \mu), \\ \tilde{r} &= \tau (1 - \mu), \\ \gamma_\varrho \tilde{x}^\varrho &= \tau \{\gamma_0 - (1 - \mu) \gamma_j \alpha^j\}, \\ d^4x' &= \tau^3 \, d\tau (1 - \mu)^2 \, d\mu \, d\omega, \end{aligned} \tag{4}$$

worin $d\omega$ das Oberflächenelement der räumlichen Einheitskugel bezeichnet.

Als Grundlösung wählen wir hier

$$\Gamma(x - x') = (-i \gamma^\nu \partial_\nu + \varkappa) \frac{\pi}{2} \varkappa \frac{N_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}}; \tag{5}$$

N_1 ist die NEUMANNsche Funktion mit dem Index 1.

Wegen der Singularität von (5) auf M wird nach dem Vorgang von [3] ein Näherungsgebiet $G_{\varepsilon\delta}$ gewählt, definiert durch die Ungleichungen

$$0 < \delta \leq \tau \leq x^0; \qquad 0 < \varepsilon \leq \mu \leq 1$$

mit der Oberfläche $O_{\varepsilon\delta}$, bestehend aus:

$$D_{\varepsilon\delta}\colon \tau = \delta, \qquad M_{\varepsilon\delta}\colon \mu = \varepsilon, \qquad B_\varepsilon\colon \tau = x^0.$$

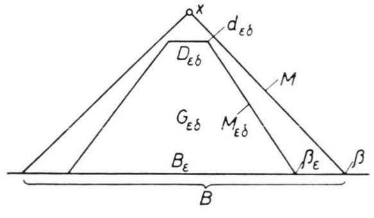

Abb. 1.

Unter Benutzung der Zusammenhänge zwischen NEUMANN- und BESSEL-Funktionen läßt sich (5) umformen zu (die Differentiationen sind z. Tl. ausgeführt)

$$\begin{aligned} \Gamma(x - x') = 2 i \gamma_\varrho \tilde{x}^\varrho \left(\frac{\varkappa}{\tilde{R}^3} J_1(\varkappa \tilde{R}) + \frac{J_0(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}^4} \right) + \frac{\varkappa}{\tilde{R}^2} J_0(\varkappa \tilde{R}) \\ - \frac{\varkappa}{2} \left[(-i \gamma^\nu \partial_\nu + \varkappa) \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] \log \varkappa^2 \tilde{R}^2 + \text{reg. Fkt.}; \end{aligned} \tag{6}$$

reg. Fkt. bezeichnet diejenigen Teile von $\Gamma(x - x')$, die für $\tilde{R} = 0$ regulär bleiben; sie gehen in das Ergebnis nicht ein. Gl. (6) stellt also die Form der Grundlösung dar, die ihre Singularitäten übersehen läßt. Wegen

$$(i \gamma^\nu \partial_\nu + \varkappa)(-i \gamma^\mu \partial_\mu + \varkappa) = \partial^\nu \partial_\nu + \varkappa^2$$

gilt in $G_{\varepsilon\delta}$:

$$\Gamma(x - x')(-i \gamma^\nu \overleftarrow{\partial}_\nu' + \varkappa) = 0.$$

Wir multiplizieren nun die DIRAC-Gleichung (1) von links mit $\Gamma(x - x')$, integrieren über $G_{\varepsilon\delta}$, formen die linke Seite nach dem GAUSSschen Integralsatz um, wobei nur das Oberflächenintegral bleibt, und erhalten:

$$i \int_{O_{\varepsilon\delta}} d\sigma_\mu' \, \Gamma(x - x') \gamma^\mu \psi(x') = \int_{G_{\varepsilon\delta}} d^4x' \, \Gamma(x - x') f(x'). \tag{7}$$

Als Funktion von ε hat (7) die Gestalt

$$a \log \varepsilon + \frac{b}{\varepsilon} + c + O(\varepsilon) = 0;$$

a, b, c hängen dabei nicht von ε ab und $O(\varepsilon)$ verschwindet mit $\varepsilon \to 0$. Man bezeichnet a als den logarithmischen Anteil eines wie (7) divergenten Ausdrucks und schreibt:

$$a = i \int_{*O_{\varepsilon\delta}} d\sigma_\mu' \, \Gamma(x - x') \gamma^\mu \psi(x') - \int_{*G_{\varepsilon\delta}} d^4x' \, \Gamma(x - x') f(x'). \tag{8}$$

Zum logarithmischen Anteil trägt offensichtlich der reguläre Bestandteil der Grundlösung nicht bei. Der Koeffizient a ist invariant gegen lineare Transformationen von ε, und die Forderung, daß (8) identisch in ε gelten soll, führt auf

$$a = 0.$$

Im Limes $\delta \to 0$ ist diese Beziehung dann die gesuchte Darstellungsformel, deren Richtigkeit im nächsten Abschnitt unabhängig verifiziert werden wird.

Wir beginnen die Auswertung mit der rechten Seite von (7). Der logarithmische Anteil ergibt sich zu

$$\int_{\delta}^{x^0} \tau^3 \,\mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\omega \int_{*\varepsilon}^{1} \mathrm{d}\mu \left[2 i \tau \left(\gamma_0 (1-\mu)^2 - \gamma_j \alpha^j (1-\mu)^3\right) \cdot \left(\frac{\varkappa^2}{\tau^2 \mu (2-\mu)} \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\varkappa \tilde{R}} + \frac{J_0(\varkappa \tilde{R})}{\tau^4 \mu^2 (2-\mu)^2}\right) + \frac{\varkappa (1-\mu)^2}{\tau^2 \mu (2-\mu)} J_0(\varkappa \tilde{R})\right] f(x') , \tag{9}$$

da der Term mit $\log \varkappa^2 \tilde{R}^2$ nach der Integration über μ nicht mehr logarithmisch divergiert. Unter Berücksichtigung der Partialbruchentwicklung von Ausdrücken der Form

$$(1-\mu)^l / [\mu (2-\mu)]^n$$

und der Reihenentwicklung der Zylinderfunktionen um den Nullpunkt erhält man hieraus (die Regularität von f am Rande wird ein für allemal vorausgesetzt):

$$\int_{*G_{\varepsilon\delta}} \mathrm{d}^4 x' \,\Gamma f = \int_{\delta}^{x^0} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\omega \int_{*\varepsilon}^{1} \mathrm{d}\mu \left[2 i \gamma_0 \left(\frac{1}{4\mu^2} - \frac{1}{4\mu}\left(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{2}\right)\right) - 2 i \gamma_j \alpha^j \left(\frac{1}{4\mu^2} - \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{4}\right)\right) + \frac{\varkappa \tau}{2\mu}\right] f(x') . \tag{10}$$

Wie in [3] folgt dann

$$\int_{*G_{\varepsilon\delta}} \mathrm{d}^4 x' \,\Gamma f = \int_{\delta}^{x^0} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\omega \int_{*\varepsilon}^{1} \mathrm{d}\mu \left\{ i (\gamma_0 - \gamma_j \alpha^j) \frac{1}{2\mu} \frac{\partial f}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=0} + \left[- i \gamma_0 \frac{1}{2\mu}\left(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{2}\right) + i \gamma_j \alpha^j \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{4}\right) + \frac{\varkappa \tau}{2\mu}\right] f\,\bigg|_{\mu=0} \right\} , \tag{11}$$

und mit

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\bigg|_{\mu=0} = - \tau \alpha^j \partial_j' \tag{12}$$

lautet das Ergebnis:

$$\int_{*G_{\varepsilon\delta}} \mathrm{d}^4 x' \,\Gamma f = \int_{\delta}^{x^0} \mathrm{d}\tau \int \mathrm{d}\omega \left\{ \frac{i \tau}{2} (\gamma_0 - \gamma_j \alpha^j) \alpha^i \frac{\partial f}{\partial x'^i}\bigg|_{\tilde{r}=\tau} + \left[i \gamma_0 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{2}\right) - i \gamma_j \alpha^j \left(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{4}\right) - \frac{\varkappa \tau}{2}\right] f\,\bigg|_{\tilde{r}=\tau} \right\} . \tag{13}$$

Der Grenzübergang $\delta \to 0$ ist hierin ohne Schwierigkeiten ausführbar.

Die Integrale $\quad i \int_{*D_{\varepsilon\delta}} \mathrm{d}\sigma_\mu' \,\Gamma \gamma^\mu \psi \quad$ und $\quad i \int_{*B_\varepsilon} \mathrm{d}\sigma_\mu' \,\Gamma \gamma^\mu \psi$

sind von gleicher Gestalt. Man kann sie zugleich auswerten, indem man das Integral

$$i \int_{*D_{\varepsilon\tau}} \mathrm{d}\sigma_\mu' \,\Gamma \gamma^\mu \psi = i \int \mathrm{d}\omega \int_{*\varepsilon}^{1} \mathrm{d}\mu \,\tau^3 (1-\mu)^2 \,\Gamma(x - x') \,\gamma^0 \psi(x') \tag{14}$$

betrachtet. Die Integration in (14) unterscheidet sich von der in (9) nur durch das Fehlen von $\int \mathrm{d}\tau$, so daß wir die dort durchgeführten Überlegungen sofort übertragen können mit dem Ergebnis

$$i \int_{*D_{\varepsilon\tau}} \mathrm{d}\sigma_\mu' \,\Gamma \gamma^\mu \psi = i \int \mathrm{d}\omega \left\{ \frac{i \tau}{2} (\gamma_0 - \gamma_j \alpha^j) \gamma_0 \alpha^i \frac{\partial \psi}{\partial x'^i}\bigg|_{\tilde{r}=\tau} + \left[i \gamma_0 \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{2}\right) - i \gamma_j \alpha^j \left(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{4}\right) - \frac{\varkappa \tau}{2}\right] \gamma_0 \psi\,\bigg|_{\tilde{r}=\tau} \right\} . \tag{15}$$

Es bleibt noch das Integral $\quad i \int_{*M_{\varepsilon\delta}} \mathrm{d}\sigma_\mu' \,\Gamma(x - x') \,\gamma^\mu \psi(x') . \quad (16)$

Für $\mu = \varepsilon$ hat die Grundlösung die Form

$$\Gamma(x - x')|_{\mu=\varepsilon} = \frac{\Gamma_1}{\varepsilon} + \frac{\Gamma_2}{\varepsilon^2} - \frac{\varkappa}{2}\left[(- i \gamma^\nu \partial_\nu + \varkappa) \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}}\right] \log \varepsilon + \text{reg. Fkt.},$$

wobei wesentlich ist, daß der Koeffizient von $\log \varepsilon$ derselbe ist wie der von $\log \varkappa^2 \tilde{R}^2$, so daß wir also für (16) erhalten:

$$i \int\limits_{^*\dot{M}_{\varepsilon\delta}} \mathrm{d}\sigma_\mu' \, \Gamma \, \gamma^\mu \, \psi = -i \int\limits_{\dot{M}_\delta} \mathrm{d}\sigma_\mu' \left[(-i \gamma^\nu \, \partial_\nu + \varkappa) \, \frac{\varkappa}{2} \, \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] \gamma^\mu \, \psi(x') \, . \tag{17}$$

Hierin kann wieder ohne Schwierigkeiten $\delta = 0$ gesetzt werden; da wir aber ψ auf M nicht kennen, müssen wir die folgende Umformung vornehmen: Der Integrand von (17) ist im ganzen Gebiet G regulär, im übrigen sind die Voraussetzungen von (7) erfüllt, so daß wir erhalten:

$$\begin{aligned} & -i \int\limits_{\dot{M}} \mathrm{d}\sigma_\mu' \left[(-i \gamma^\nu \, \partial_\nu + \varkappa) \, \frac{\varkappa}{2} \, \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] \gamma^\mu \, \psi(x') \\ & \quad = i \int\limits_{\dot{B}} \mathrm{d}\sigma_\mu' \left[(-i \gamma^\nu \, \partial_\nu + \varkappa) \, \frac{\varkappa}{2} \, \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] \gamma^\mu \, \psi(x') - \int\limits_{\dot{G}} \mathrm{d}^4 x' \left[(-i \gamma^\nu \, \partial_\nu + \varkappa) \, \frac{\varkappa}{2} \, \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] f(x') \, . \end{aligned} \tag{18}$$

In (18) kommen nur noch bekannte Größen vor. Damit ist das Bilden der logarithmischen Anteile abgeschlossen. Der Grenzübergang $\delta \to 0$ erfordert nur für das Integral

$$i \int\limits_{^*\dot{D}_{\varepsilon\delta}} \mathrm{d}\sigma_\mu' \, \Gamma \, \gamma^\mu \, \psi = i \int \mathrm{d}\omega \left\{ \frac{i \, \delta}{2} \, (\gamma_0 - \gamma_j \, \alpha^j) \, \gamma_0 \, \alpha^i \, \partial_i' \, \psi + \left[i \, \gamma_0 \, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varkappa^2 \, \delta^2}{2} \right) - i \, \gamma_j \, \alpha^j \left(1 - \frac{\varkappa^2 \, \delta^2}{4} \right) - \frac{\varkappa \, \delta}{2} \right] \gamma_0 \, \psi \right\} \tag{19}$$

noch zusätzliche Überlegungen. Im Limes $\delta \to 0$ bleibt hiervon

$$- \int\limits_{d_\delta, \, \delta = 0} \mathrm{d}\omega \, (\tfrac{1}{2} \psi - \gamma_j \, \alpha^j \, \gamma_0 \, \psi) \, ,$$

wobei der zweite Term bei der Winkelmittelung verschwindet, während der erste $-2 \pi \psi$ im Aufpunkt liefert. Für (19) kommt also:

$$\lim_{\delta \to 0} i \int\limits_{^*\dot{D}_{\varepsilon\delta}} \mathrm{d}\sigma_\mu' \, \Gamma \, \gamma^\mu \, \psi = -2 \pi \, \psi(x) \, .$$

Fassen wir alle Ergebnisse zusammen und beachten, daß bei der Verwendung von (15) für das Integral über B die Normalenrichtung $-\gamma_0$ einzusetzen ist, so erhalten wir die gewünschte Darstellungsformel:

$$\begin{aligned} 2 \pi \, \psi(x) = & - \int\limits_{\dot{G}} \mathrm{d}^4 x' \left[(-i \gamma^\nu \, \partial_\nu + \varkappa) \, \frac{\varkappa}{2} \, \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] f(x') - i \int\limits_{\dot{B}} \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x}' \left[(-i \gamma^\nu \, \partial_\nu + \varkappa) \, \frac{\varkappa}{2} \, \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] \gamma_0 \, \psi(x') \\ & - \int\limits_{\dot{M}} \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\omega \left\{ \boldsymbol{i} \, \frac{\tau}{2} \, (\gamma_0 - \gamma_j \, \alpha^j) \, \alpha^i \, \partial_i' \, f(x') + \left[i \, \gamma_0 \, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varkappa^2 \, \tau^2}{2} \right) - i \, \gamma_j \, \alpha^j \left(1 - \frac{\varkappa^2 \, \tau^2}{4} \right) - \frac{\varkappa \, \tau}{2} \right] f(x') \right\} \\ & + \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega \left\{ \frac{x^0}{2} \, (\gamma_0 - \gamma_j \, \alpha^j) \, \gamma_0 \, \alpha^i \, \partial_i' \, \psi(x') + \left[\gamma_0 \, \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\varkappa^2 (x^0)^2}{2} \right) - \gamma_j \, \alpha^j \left(1 - \frac{\varkappa^2 (x^0)^2}{4} \right) + i \, \frac{\varkappa \, x^0}{2} \right] \gamma_0 \, \psi(x') \right\} . \end{aligned} \tag{20}$$

2. Verifikation der Darstellungsformel

a) Die Darstellungsformel reproduziert die Anfangswerte

Läßt man den Aufpunkt auf die Anfangsfläche $x^0 = 0$ rücken, so geht das Integrationsgebiet der Integrale

$$\int\limits_{G} \mathrm{d}^4 x' ; \quad \int\limits_{M} \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\omega ; \quad \int\limits_{B} \mathrm{d}^3 \boldsymbol{x}'$$

gegen Null, diese liefern also keinen Beitrag. Es bleibt lediglich das Integral über β, von dessen Integrand jedoch wegen $x^0 = 0$ alles außer

$$(\tfrac{1}{2} \psi - \gamma_j \, \alpha^j \, \gamma_0 \, \psi)$$

verschwindet. Man erhält hieraus mit den gleichen Überlegungen, wie sie bei der Auswertung des Integrals über die Deckfläche $D_{\varepsilon\delta}$ [vgl. (19)] benutzt wurden:

$$\lim_{x^0 \to 0} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega \, (\tfrac{1}{2} \psi - \gamma_j \, \alpha^j \, \gamma_0 \, \psi) = 2 \pi \, \psi(x^0 = 0) \, .$$

Die durch die Darstellungsformel (20) gegebene Funktion erfüllt also die Anfangsbedingungen.

b) Die DIRAC-*Gleichung ist erfüllt*

Für die folgenden Betrachtungen ist es bequem, die Integrationsvariable τ durch x'^0 zu ersetzen und τ nur als Abkürzung für $x^0 - x'^0$ zu verstehen. Es gilt:

$$\int_0^{x^0} \mathrm{d}\tau = \int_0^{x^0} \mathrm{d}x'^0 .$$

Die Anwendung des DIRAC-Operators auf die rechte Seite der Darstellungsformel ergibt eine Reihe von Termen, die wir nacheinander diskutieren wollen. Wir beginnen mit

$$-\int_{G(x)} \mathrm{d}^4x' \, \frac{\varkappa}{2} \left[(-i\gamma^\nu \partial_\nu + \varkappa) \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] f(x') . \quad (21)$$

Dieses Integral hängt sowohl über die Integrationsgrenzen [angedeutet durch die Bezeichnung $G(x)$] als auch über den Integranden vom Aufpunkt ab. Die Anwendung des DIRAC-Operators auf den Integranden ergibt Null, da

$$(\partial^\nu \partial_\nu + \varkappa^2) \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} = 0$$

im gesamten Integrationsgebiet gilt. Es bleibt

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \overset{\downarrow}{\int_{G(x)}} \mathrm{d}^4x' \, \frac{\varkappa}{2} \left[(-i\gamma^\nu \partial_\nu + \varkappa) \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] f(x') , \quad (22)$$

worin der Pfeil über dem Integralzeichen andeuten soll, daß hier nur die Grenzen differenziert werden sollen. Zur Auswertung von (22) gehen wir auf die Definition der Ableitung zurück und berechnen die Differenz (vgl. Abb. 2)

$$\Big(\int_{G(x+\delta x)} - \int_{G(x)} \Big) \mathrm{d}^4x' . \quad (23)$$

(23) ist gleich dem Volumenintegral über das Differenzgebiet $G(\delta x) = G(x+\delta x) - G(x)$. Schreiben wir nach Einführung räumlicher Polarkoordinaten

$$\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}x'^0 \, \tilde{r}^2 \, \mathrm{d}\tilde{r} \, \mathrm{d}\omega$$

und berücksichtigen, daß

$$\mathrm{d}x'^0 \, \tau^2 \, \mathrm{d}\omega$$

das Oberflächenelement des Randes M von $G(x)$ ist, der bei einer Änderung von x verschoben wird [der Teil B des Randes von $G(x)$ bleibt fest], so ergibt

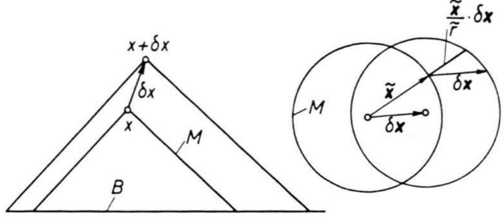

Abb. 2.

sich für das Element des Differenzvolumens

$$\mathrm{d}x'^0 \, \tau^2 \, \mathrm{d}\omega \, (\delta x^0 - \alpha_j \, \delta x^j) .$$

Damit folgt:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \overset{\downarrow}{\int_{G(x)}} \mathrm{d}^4x' = i \int_0^{x^0} \mathrm{d}x'^0 \int \mathrm{d}\omega \, \tau^2 (\gamma_0 - \gamma_j \alpha^j) . \quad (24)$$

Für den Integranden auf M ($\tilde{R} = 0$) erhalten wir unter Berücksichtigung von

$$\gamma_\varrho \tilde{x}^\varrho = \tau (\gamma_0 - \gamma_j \alpha^j) \quad \text{auf } M$$

den Wert

$$\left[\frac{\varkappa^2}{2} + i \frac{\tau}{8} \varkappa^3 (\gamma_0 - \gamma_j \alpha^j) \right] f(x') . \quad (25)$$

Beim Einsetzen von (25) in (24) fällt der zweite Term wegen

$$(\gamma_0 - \gamma_j \alpha^j)(\gamma_0 - \gamma_i \alpha^i) = 0$$

weg. Insgesamt haben wir also als Beitrag von der Anwendung des DIRAC-Operators auf das Volumenintegral

$$-(i\gamma^\mu \partial_\mu + \varkappa) \int_{G(x)} \mathrm{d}^4x' \, \frac{\varkappa}{2} \left[(-i\gamma^\nu \partial_\nu + \varkappa) \frac{J_1(\varkappa \tilde{R})}{\tilde{R}} \right] f(x') = -\frac{\varkappa}{2} \int_0^{x^0} \mathrm{d}x'^0 \int \mathrm{d}\omega \, i \, \frac{\varkappa^2 \tau^2}{2} (\gamma_0 - \gamma_j \alpha^j) \, f(x') . \quad (26)$$

Wir wenden uns nun dem Mantelintegral

$$-\int_0^{x^0} \mathrm{d}x'^0 \int \mathrm{d}\omega \left\{ i \frac{\tau}{2} (\gamma_0 - \gamma_j \alpha^j) \, \alpha^i \partial_i' f(x') + \left[i\gamma_0 \frac{1}{2} \Big(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{2}\Big) - i\gamma_j \alpha^j \Big(1 - \frac{\varkappa^2 \tau^2}{4}\Big) - \frac{\varkappa \tau}{2} \right] f(x') \right\} \quad (27)$$

zu. Hierin hängen vom Aufpunkt ab: 1. die obere Grenze von $\int_0^{x^0} \mathrm{d}x'^0$; 2. der Ausdruck $\tau = x^0 - x'^0$; 3. die Werte $\hat{f}$ von f auf M. Für letztere gelten, wie man leicht durch Einsetzen von (3) erkennt, die folgenden Formeln:

$$\hat{f} = f(x'^0 ; \, x'^j = x^j + \tau \alpha^j) , \quad (28)$$

$$\gamma^\mu \partial_\mu \hat{f} = (\gamma^i + \alpha^i \gamma_0) \, \partial_i' f . \quad (29)$$

Von der Anwendung des DIRAC-Operators auf das Mantelintegral (27) betrachten wir zunächst die Ableitung nach der oberen Grenze von $\int \mathrm{d}x'^0$. Wegen des Faktors τ verschwindet vom Integranden an der oberen Grenze alles bis auf die Terme

$$\int \mathrm{d}\omega \left(-\frac{i}{2}\gamma_0 + i\gamma_j \alpha^j\right)\hat{f},$$

so daß wir analog zur Auswertung des Integrals über die Deckfläche bei der Herleitung der Darstellungsformel erhalten:

$$-i\gamma^\mu \partial_\mu \int_0^{\overset{\downarrow}{x^0}} \mathrm{d}x'^0 \int \mathrm{d}\omega \{\dots\} = 2\pi f(x)\,. \quad (30)$$

Die Anwendung des DIRAC-Operators auf den Integranden von (27) kompensiert gerade den Beitrag (26) vom Volumenintegral. Dies erhält man nach längerer, jedoch elementarer Rechnung unter Benützung der Formeln

$$\int_{\tilde{r}=\tau} \mathrm{d}\omega\,(\gamma^i + \alpha^i \gamma_j \alpha^j)\,\partial_i' f(x') = -\frac{2}{\tau}\int_{\tilde{r}=\tau} \mathrm{d}\omega\,\gamma_j \alpha^j f(x')$$

und $$\int_{\tilde{r}=\tau} \mathrm{d}\omega\,(\gamma^i + \alpha^i \gamma_j \alpha^j)\,\gamma_k \alpha^k \partial_i' f(x') = 0\,.$$

Sie ergeben sich aus dem STOKESschen Integralsatz im Dreidimensionalen, wenn man $\gamma^j \partial_j$ in den symmetrischen und alternierenden Anteil zerlegt:

$$\gamma^j \partial_j = -\gamma_j \frac{x^j}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2r}\gamma_j \frac{x^j}{r}\gamma^k \gamma^l (x_k \partial_l - x_l \partial_k)$$

bzw. $$\gamma^j \partial_j = -\frac{2}{r}\gamma_j \frac{x^j}{r} - \gamma_j \frac{x^j}{r}\frac{\partial r}{\partial r} + \frac{1}{2r}\gamma^k \gamma^l (x_k \partial_l - x_l \partial_k)\,\gamma_j \frac{x^j}{r}\,.$$

Man beachte, daß die Integrale über die geschlossene Oberfläche der Einheitskugel genommen werden und der Vektor (α^j) die Richtung der Oberflächennormalen hat.

Insgesamt also ergibt die Anwendung des DIRAC-Operators auf die Summe von Volumen- und Mantelintegral der Darstellungsformel gerade $2\pi f(x)$, d. h. diese Summe ist eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.

Die Anwendung des DIRAC-Operators auf die Summe von Boden- und Randintegral über β ergibt Null, da die Rechnung der obigen vollkommen analog verläuft mit dem einen Unterschied, daß hierbei die x'^0-Integration fehlt und damit der zu $f(x)$ analoge Term nicht auftritt, weil nicht nach der oberen Grenze differenziert wird. Die Integrale über B und β stellen also zusammen eine Lösung der homogenen Gleichung dar, die, wie in 2. a) gezeigt wurde, die vorgegebenen Anfangswerte annimmt.

3. Die Randbedingung $\mathrm{d}\sigma_\mu \gamma^\mu \psi = 0$

Bei einer von FRANZ [4] vorgeschlagenen Quantisierung des DIRAC-Feldes ergeben sich Feldgleichungen in Gestalt einer inhomogenen DIRAC-Gleichung

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + \varkappa)\,\psi(x) = f(x)\,, \quad (31)$$

wobei ψ auf den beiden durch $x^\mu x_\mu = 0$ und $(x^\mu - z^\mu)(x_\mu - z_\mu) = 0$ mit $z^\mu z_\mu > 0$ gegebenen Lichtkegeln die Randbedingung

$$\int \mathrm{d}\sigma_\mu F(x)\,\gamma^\mu \psi(x) = 0 \quad (32)$$

mit einer beliebigen nicht singulären Funktion $F(x)$ erfüllen muß, damit die Erhaltungssätze für Energie und Impuls abgeleitet werden können.

Wir wollen im folgenden zunächst nur die Verhältnisse auf dem Lichtkegel I $(x^\mu x_\mu = 0)$ ausführlich betrachten. Da die Fläche eine Nullfläche ist, liegt der Normalenvektor $\mathrm{d}\sigma_\mu$ in der Fläche, und wir können, indem wir über $\mathrm{d}\sigma$ geeignet verfügen, $\mathrm{d}\sigma_\mu = \mathrm{d}\sigma\, x_\mu$ setzen, so daß wir haben (vgl. [5], Kap. IX, § 19)

$$\mathrm{d}\sigma_\mu \gamma^\mu = \mathrm{d}\sigma\,\gamma_\mu x^\mu\,. \quad (33)$$

Dann lautet die Randbedingung in differentieller Form:

$$\gamma_\mu x^\mu \psi = 0\,. \quad (34)$$

In ganz analoger Weise erhalten wir für den zweiten Lichtkegel:

$$\gamma_\mu (x^\mu - z^\mu)\,\psi = 0\,. \quad (35)$$

Die Gln. (34) und (35) verlangen nicht $\psi = 0$, da die CLIFFORDschen Zahlen $\gamma_\mu x^\mu$ bzw. $\gamma_\mu(x^\mu - z^\mu)$ auf dem jeweiligen Lichtkegel Nullteiler vom Reduktionsvermögen 1/2 sind. Stellt man die γ_μ in bekannter Weise durch vierreihige Matrizen dar, so sind in (34) bzw. (35) jeweils nur zwei Gleichungen linear unabhängig. Der Spinor ψ wird auf den Lichtkegeln durch die Randbedingung „nur zur Hälfte" bestimmt. Auf dem Schnitt der beiden Lichtkegel ist jedoch $\psi = 0$, da dort beide Bedingungen

[4] W. FRANZ, Z. Naturforschg. **14 a**, 493 [1959].

[5] J. L. SYNGE, Relativity: The Special Theory, North Holl. Publ. Comp., Amsterdam 1958.

gleichzeitig gelten und wegen (34) von (35) nur bleibt:

$$\gamma_\mu z^\mu \psi = 0 .$$

Nach Voraussetzung ist z kein Nullvektor, daher besitzt $\gamma_\mu z^\mu$ ein Reziprokes, so daß folgt:

$$\psi = 0 \quad \text{auf dem Schnitt der Lichtkegel.} \tag{36}$$

Schreiben wir

$$\gamma_\mu x^\mu = \gamma_0 x^0 + \gamma_r r \tag{37}$$

mit

$$\gamma_r = \gamma_j x^j / r \tag{38}$$

und beachten, daß auf dem Lichtkegel I $x^0 = r$ ist, so können wir die Randbedingung (34) auch in der Form

$$(\gamma_0 + \gamma_r) \psi = 0 \tag{39}$$

angeben. Die Klasse derjenigen Funktionen, die die Randbedingung auf dem Lichtkegel I erfüllen, wird nun durch den folgenden Satz bestimmt:

Für das Bestehen der Randbedingung $\gamma_\mu x^\mu \psi = 0$ auf $x^\mu x_\mu = 0$ ist notwendig und hinreichend, daß sich ψ im ganzen Gebiet einschließlich des Lichtkegels darstellen läßt als

$$\psi = \gamma_\nu x^\nu \varphi , \tag{40}$$

wobei die Funktion φ auf dem Lichtkegel nicht stärker als $R^{\varepsilon-2}$ (mit $\varepsilon > 0$) singulär werden darf.

a) Wir beginnen mit der hinreichenden Bedingung: Sie ist selbstverständlich, da aus (40) sofort folgt, daß auf dem Lichtkegel I gilt:

$$\gamma_\mu x^\mu \psi = R^2 \varphi = 0 . \tag{41}$$

b) Die Bedingung ist auch notwendig. Wir brauchen dies nur für den Lichtkegel zu zeigen, da das Abspalten des Faktors $\gamma_\nu x^\nu$ aus ψ im Inneren immer möglich ist, weil dort $\gamma_\nu x^\nu$ ein Reziprokes besitzt. Wir setzen nun also (39) voraus, das bedeutet:

$$\gamma_0 \psi = -\gamma_r \psi . \tag{42}$$

Wir führen ein

$$\psi_0 = \gamma_0 \psi ; \qquad \psi_r = -\gamma_r \psi$$

und haben damit die Identitäten

$$\psi = \gamma_0 \psi_0 , \qquad \psi = \gamma_r \psi_r \tag{43 a, b}$$

Aus diesen folgt

$$2\psi = \gamma_0 \psi_0 + \gamma_r \psi_r , \tag{44}$$

und wegen (42) ergibt sich dann

$$2\psi = (\gamma_0 + \gamma_r) \psi_0 . \tag{45}$$

Das heißt, aus dem Erfülltsein der Randbedingung folgt, daß ψ den linken Faktor $\gamma_0 + \gamma_r$ abspaltet, wie behauptet.

Alle Funktionen, die der Randbedingung (39) genügen, besitzen also die Darstellung (40). Ein analoges Ergebnis gilt dann auch auf dem zweiten Lichtkegel; dort lautet die Darstellung:

$$\psi = \gamma_\mu (x^\mu - z^\mu) \varphi .$$

Wir können beide Formeln kombinieren, so daß die Darstellung

$$\psi = [(x^\mu - z^\mu)(x_\mu - z_\mu) \gamma_\nu x^\nu + x^\mu x_\mu \gamma_\nu (x^\nu - z^\nu)] \varphi \tag{46}$$

die Randbedingung auf beiden Lichtkegeln erfüllt. Aus (46) ergibt sich explizit noch einmal (36).

Die Darstellung (46) ist insofern nicht eindeutig, als an Stelle von $(x^\mu - z^\mu)(x_\mu - z_\mu)$ bzw. $x^\mu x_\mu$ irgendeine Funktion gewählt werden kann, die am Rande wie $(x^\mu - z^\mu)(x_\mu - z_\mu)$ bzw. $x^\mu x_\mu$ verschwindet. Diese Vieldeutigkeit ist jedoch nicht wesentlich, da das Verhalten dieser Funktionen im Inneren immer in die Funktion φ hineingenommen werden kann. Wir wollen also (46) als die normale Darstellung der Klasse von Funktionen ansehen, die die Randbedingung auf beiden Lichtkegeln erfüllt.

4. Dirac-Operator und Randbedingung

Mit den Abkürzungen

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x^j}{r} \partial_j , \qquad \gamma_r = -\gamma^r = \gamma_j \frac{x^j}{r} , \qquad \lambda_{kj} = \tfrac{1}{2} (x_k \partial_j - x_j \partial_k) \tag{47}$$

schreibt sich der DIRAC-Operator in räumlichen Polarkoordinaten:

$$\gamma^\mu \partial_\mu = \gamma^0 \partial_0 + \gamma^r \partial_r + \gamma^r \gamma^k \gamma^j \lambda_{kj} . \tag{48}$$

Wir führen neue Koordinaten ein durch

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + r) ; \quad t = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 - r), \tag{49}$$

damit die Ableitungen nach den charakteristischen Richtungen des DIRACschen Differentialausdrucks auftreten. Dann ist

$$\partial_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_s + \partial_t) ; \qquad \partial_r = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_s - \partial_t) . \tag{50}$$

Definieren wir noch γ_s und γ_t durch

$$\gamma^s = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 + \gamma^r) = \gamma_t ; \qquad \gamma^t = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 - \gamma^r) = \gamma_s , \tag{51}$$

so erhält der DIRAC-Operator die folgende Gestalt:

$$\gamma^\mu \, \partial_\mu = \gamma^s \, \partial_s + \gamma^t \, \partial_t + \gamma^r \, \gamma^k \, \gamma^j \, \lambda_{kj} \, . \tag{52}$$

In dem letzten Term haben wir die Koordinatentransformation nicht ausgeführt, da wir ihn für die folgenden Überlegungen nicht benötigen; wesentlich ist nur die Feststellung, daß er nicht mit einem Nullteiler als Faktor behaftet ist. Man bestätigt nämlich leicht mit Hilfe der Definitionen (51), daß γ^s und γ^t Nullteiler sind. Ihr Reduktionsvermögen ist 1/2. Dies besagt gerade, daß die Koordinatenrichtungen s und t die charakteristischen Richtungen des DIRACschen Differentialausdrucks sind, denn nach den Ableitungen $\partial_s \psi$ bzw. $\partial_t \psi$ kann die DIRAC-Gleichung nicht aufgelöst werden (vgl. [3], Anhang zum II. Kap., § 1).

Wir werden nun die Form (52) des DIRAC-Operators in Zusammenhang bringen mit der Randbedingung (39), die in den hier benutzten Bezeichnungen lautet:

$$\gamma_s \, \psi = 0 \, . \tag{53}$$

Der Lichtkegel I ist die Fläche $t = 0$. Dort hat ψ die Darstellung

$$\psi = \gamma_s \, \varphi \, . \tag{54}$$

Damit erhalten wir auf dem Lichtkegel

$$\gamma^\mu \, \partial_\mu \, \psi = (\gamma^s \, \partial_s + \gamma^r \, \gamma^k \, \gamma^j \, \lambda_{kj}) \, \gamma_s \, \varphi \, , \tag{55}$$

da γ_s nur von den räumlichen Winkeln abhängt.

Nach (55) hat also das Erfülltsein der Randbedingung zur Folge, daß die DIRAC-Gleichung auf dem Lichtkegel eine innere Differentialgleichung wird, die die herausführende Ableitung $\partial_t \psi$ nicht mehr enthält. Die Anfangswerte einer Lösung ψ, die etwa auf dem Lichtkegel in Übereinstimmung mit der DIRAC-Gleichung (d. h. also nicht ganz willkürlich) vorgegeben seien, bestimmen, wenn sie der Randbedingung genügen, über die herausführende Ableitung nichts. Die Anfangswerte können somit die Lösung im Inneren über die Differentialgleichung nicht mehr beeinflussen, während sie in dem Falle, daß ψ nicht dieser Randbedingung genügt, immerhin die Ableitung $\partial_t \psi$ „zur Hälfte" festlegen.

Die Randbedingung war in [4] entstanden aus der Forderung, daß die bei der Herleitung der Erhaltungssätze auftretenden Randintegrale verschwinden sollten. Sonst sind diese Randintegrale über die unendlich ferne Kugel zu nehmen; sie geben dann keinen Beitrag, weil vorausgesetzt wird, daß die Funktionen im Unendlichen hinreichend stark verschwinden. Dann spielen die Werte im Unendlichen auch für die Lösung keine Rolle mehr. Wir sehen nun, daß die Randbedingung (32) im Falle eines endlichen durch Lichtkegel begrenzten Gebietes dasselbe leistet: Sie ermöglicht die Herleitung der Erhaltungssätze und sorgt dafür, daß die Randwerte sich nicht vermittels der DIRAC-Gleichung ins Innere fortpflanzen.

5. Darstellungsformel für das charakteristische Anfangswertproblem der Dirac-Gleichung

Das HADAMARDsche Verfahren (vgl. Abschn. 1) ist auch geeignet, die Darstellungsformel für das charakteristische Problem zu liefern. Wir werden sie hier für den Fall herleiten, daß die Anfangswerte von ψ auf der charakteristischen Fläche $\bar{\sigma}$ (d. h. dem Lichtkegel $x^\mu x_\mu = 0$) der Bedingung (34) genügen. Wie in Abschn. 1 betrachten wir wieder den rückwärtigen Lichtkegel des Aufpunktes x und erhalten durch den Schnitt mit der Anfangsfläche das Abhängigkeitsgebiet $\bar{G}$ (vgl. Abb. 3). $\bar{G}$ wird begrenzt von $\bar{M}$ und $\bar{B}$. Mit denselben Bezeichnungen wie früher führen wir ein Näherungsgebiet $\bar{G}_{\varepsilon\delta}$ ein, dessen Oberfläche $\bar{O}_{\varepsilon\delta}$ aus $\bar{M}_{\varepsilon\delta}$, $D_{\varepsilon\delta}$ und $\bar{B}_\varepsilon$ besteht.

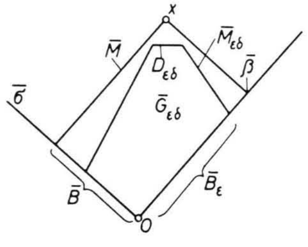

Abb. 3.

Wir können nun die Gl. (7) übernehmen, wobei zu beachten ist, daß sie sich hier auf

$$i \int_{\bar{M}_{\varepsilon\delta}} d\sigma_\mu' \, \Gamma(x-x') \, \gamma^\mu \, \psi(x') + i \int_{D_{\varepsilon\delta}} d\sigma_\mu' \, \Gamma(x-x') \, \gamma^\mu \, \psi(x') = \int_{\bar{G}_{\varepsilon\delta}} d^4x' \, \Gamma(x-x') \, f(x') \tag{56}$$

reduziert, weil wegen der Anfangsbedingung das Integral über $\bar{B}_\varepsilon$ verschwindet.

Von (56) werden wieder die logarithmischen Anteile gebildet, wobei die Rechnung genau so verläuft wie in Abschn. 1, wenn man der Einfachheit halber den Aufpunkt auf Ruhe transformiert. Es entsteht so aus $\int\limits_{*\overline{G}_{\varepsilon\delta}} d^4x'\,\Gamma f$ das Mantelintegral der Darstellungsformel, aus $i\int\limits_{*\overline{D}_{\varepsilon\delta}} d\sigma_\mu'\,\Gamma\gamma^\mu\psi$ erhalten wir $2\pi\psi(x)$, und $i\int\limits_{\overline{M}_{\varepsilon\delta}} d\sigma_\mu'\,\Gamma\gamma^\mu\psi$ liefert hier nur das Volumenintegral, weil wegen der Anfangsbedingung das Integral über $\overline{B}$ verschwindet. Somit lautet die Darstellungsformel für das charakteristische Problem:

$$2\pi\psi(x) = -\int\limits_{\dot{\overline{G}}} d^4x'\left[(-i\gamma^\nu\partial_\nu+\varkappa)\,\frac{\varkappa}{2}\,\frac{J_1(\varkappa\tilde{R})}{\tilde{R}}\right]f(x') \tag{57}$$
$$-\int\limits_{\dot{\overline{M}}} d\tau\,d\omega\left\{i\,\frac{\tau}{2}\,(\gamma_0-\gamma_j\alpha^j)\,\alpha^i\,\partial_i'\,f(x')+\left[i\gamma_0\frac{1}{2}\left(1-\frac{\varkappa^2\tau^2}{2}\right)-i\gamma_j\alpha^j\left(1-\frac{\varkappa^2\tau^2}{4}\right)-\frac{\varkappa\tau}{2}\right]f(x')\right\}.$$

Man hätte diese Formel nicht ohne weiteres dadurch gewinnen können, daß man in Abschn. 1 die Anfangsfläche charakteristisch werden läßt, da – abgesehen von der Schreibweise in (20) – bei der Berechnung des logarithmischen Anteils vom Integral über B_ε eine Zerlegung des Oberflächenelements benutzt wurde, die voraussetzt, daß B raumartig ist.

Die Darstellungsformel bestätigt die Ergebnisse von Abschnitt 4 explizit: Wenn ψ auf der charakteristischen Anfangsfläche die Randbedingung (34) erfüllt, so hat das zur Folge, daß die Lösung im Inneren von den Anfangswerten nicht mehr abhängt.

Mit den gleichen Überlegungen wie in Abschn. 2 läßt sich zeigen, daß die durch (57) gegebene Funktion die inhomogene Dirac-Gleichung löst. Für die Rechnung ist es dabei wieder bequem, den Aufpunkt auf Ruhe zu transformieren.

Es bleibt noch die Frage, welche Werte die Lösung auf dem Lichtkegel annimmt. Läßt man den Aufpunkt auf $\bar{\sigma}$ rücken, so geht das Volumen von $\overline{G}$ gegen Null. Das Volumenintegral liefert also keinen Beitrag. Um zu zeigen, daß auch der Beitrag des Mantelintegrals verschwindet, berechnen wir zunächst den zeitlichen Abstand $\tau(\vartheta)$ zwischen dem Aufpunkt und den Punkten des Schnittes $\bar{\beta}$ des Kegels $\overline{M}$ mit der Anfangsfläche $\bar{\sigma}$. Wir erhalten

$$\tau(\vartheta) = \frac{x^0}{2\,\mathrm{Cos}^2\chi\,(1+\mathrm{Tan}\,\chi\cos\vartheta)}\,, \tag{58}$$

worin ϑ den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}$ bedeutet. Ferner wurde χ eingeführt durch

$$x^0 = R\,\mathrm{Cos}\,\chi; \qquad r = R\,\mathrm{Sin}\,\chi\,.$$

Wenn x auf den Lichtkegel $\bar{\sigma}$ rückt, geht χ gegen $+\infty$. Das Mantelintegral aus (57) läßt sich nach Einführung räumlicher Polarkoordinaten für $d\omega$ mit der Richtung von $\boldsymbol{x}$ als Polarachse schreiben als

$$\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_{-1}^{+1} d\cos\vartheta\int\limits_0^{\tau(\vartheta)} d\tau\,F(\tau,\vartheta,\varphi)\,. \tag{29}$$

$F(\tau,\vartheta,\varphi)$ bezeichnet hierbei die geschweifte Klammer in (57).

Nun ist

$$\lim_{\chi\to\infty}\frac{x^0}{2\,\mathrm{Cos}^2\chi\,(1+\mathrm{Tan}\,\chi\cos\vartheta)} = \begin{cases} x^0 & \text{für } \cos\vartheta=-1\,,\\ 0 & \text{für } \cos\vartheta\neq-1\,.\end{cases} \tag{60}$$

Dies besagt, daß, da (60) die obere Grenze von $\int d\tau$ ist, der Integrand von $\int d\cos\vartheta$ überall verschwindet außer im Punkt $\cos\vartheta=-1$, wo er jedoch endlich bleibt. Dann verschwindet aber das Integral über $\cos\vartheta$, und wir erhalten vom Mantelintegral keinen Beitrag, wenn der Aufpunkt auf den Lichtkegel $\bar{\sigma}$ rückt.

Wir fassen zusammen: Die Lösung des charakteristischen Anfangswertproblems der Dirac-Gleichung mit der Randbedingung (34) (die nicht $\psi=0$ auf dem Rande fordert!) hängt von den Anfangsdaten nicht ab und nimmt auf dem Rande den Wert Null an.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. W. Franz, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und wertvolle Diskussionen.